उपकार

वैदिक गणित सूत्र

हमारे ऋषियों द्वारा प्रतिपादित
गणित सूत्र जोकि आपकी
गणना क्षमताओं में वृद्धि करेंगे

डॉ. आलोक कुमार

VISIT…

उपकार

वैदिक गणित सूत्र

हमारे ऋषियों द्वारा प्रतिपादित
गणित सूत्र जोकि आपकी
गणना क्षमताओं में वृद्धि करेंगे

लेखक
डॉ. आलोक कुमार

उपकार प्रकाशन, आगरा-2

Introducing Direct Shopping

Now you can purchase from our vast range of books and magazines at your convenience :

- Pay by Credit Card/Debit Card or Net Banking facility on our website *www.upkar.in* *OR*
- Send Money Order/Demand Draft of the print price of the book favouring 'Upkar Prakashan' payable at Agra. In case you do not know the price of the book, please send Money Order/Demand Draft of ₹ 100/- and we will send the books by VPP (Cash on delivery).

(Postage charges FREE for purchases above ₹ 100/-. For orders below ₹ 100/-, ₹ 20/- will be charged extra as postage)

© प्रकाशक

प्रकाशक

उपकार प्रकाशन

(An ISO 9001 : 2000 Company)

2/11 ए, स्वदेशी बीमा नगर (शाह सिनेमा के सामने), **आगरा**–282 002

फोन : 4053333, 2530966, 2531101; **फैक्स** : (0562) 4053330, 4031570

E-mail : care@upkar.in

Website : www.upkar.in

ब्रांच ऑफिस

4845, अन्सारी रोड, दरियागंज, **नई दिल्ली**–110 002
फोन : 011–23251844/66

1-8-1/B, आर. आर. कॉम्प्लेक्स (सुन्दरैया पार्क के पास, मनसा एन्क्लेव गेट के बगल में), बाग लिंगमपल्ली, **हैदराबाद**–500 044 (आ. प्र.)
फोन : 040–66753330

पीरमोहनी चौक, कदमकुआँ **पटना**–800 003
मो. : 9334137572

- *इस पुस्तक को प्रकाशित करने में प्रकाशक द्वारा पूर्ण सावधानी बरती गई है, फिर भी किसी त्रुटि के लिए प्रकाशक जिम्मेदार नहीं होगा.*
- *इस पुस्तक को अथवा इसके किसी अंश को बिना प्रकाशक की लिखित अनुमति के, किसी भी रूप–फोटोग्राफी, विद्युत-ग्राफिक, यान्त्रिकी अथवा अन्य रूप में किसी भी प्रकार से उपयोग के लिए, नहीं छापा जा सकता है.*
- *किसी भी परिवाद के लिए न्यायिक क्षेत्र केवल आगरा ही होगा.*

ISBN : 978-93-5013-332-3

मूल्य : ₹ 45·00 मात्र

(Rs. Forty Five Only)

Code No. 540

मुद्रक : उपकार प्रकाशन (प्रिंटिंग यूनिट) बाई-पास, आगरा

विषय-सूची

- वैदिक गणित सूत्र..... 3–4
- **वैदिक सूत्र : अंकगणितीय गणनाओं में..... 5–57**

1. एकाधिकेन पूर्वेण..... 6
2. निखिलं नवतश्चरमं दशतः..... 9
3. परावर्त्य योजयेत्..... 11
4. एकन्यूनेन पूर्वेण..... 19
5. आन्त्योर्दशकेऽपि 21
6. यावदूनम् 23
7. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्..... 26
8. व्यष्टि-समष्टि 53
9. गुणक समुच्चयः समुच्चय गुणकः 55

- **वैदिक सूत्र : जो बनाते हैं आसान बीजगणित को..... 59–78**

10. परावर्त्य योजयेत्..... 61
11. सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्..... 62
12. पूरणापूरणाभ्यां..... 63
13. आनुरूप्ये शून्यंअन्यत्..... 65
14. संकलन व्यवकलनाभ्याम्..... 67
15. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन..... 69
16. अन्त्ययोरेव..... 71
17. लोपंस्थापनाभ्याम्..... 73
18. गुणित समुच्चयः समुच्चय गुणितः..... 74
19. शून्यं साम्य समुच्चये..... 76

वैदिक गणित सूत्र

गणेश = गण + ईश

(Ganesh) (Gana) (ish)

गणित = गण + इत्

(Ganit) (Gana) (it)

गण का अर्थ है, अंक.

गणेश—अंकों के देव, जिनकी अनुकम्पा से एक विद्यार्थी, गणित में योग्यता पाता है और अंकों से प्रयोग करता है.

वैदिक गणित सूत्र

वैदिक गणित सूत्र हमारे प्राचीन वेदों से प्राप्त गणितीय गणना की परम्परा का एक अंग है. जब गणितीय गणन करने के लिए हमारे पास न तो कैल्कुलेटर थे और न ही कम्प्यूटर, तब गणनाओं को तेजी से करने के लिए हमारे ऋषियों द्वारा इन गणित सूत्रों का उपयोग किया जाता था. यह गणित सूत्र हैं तो छोटे परन्तु इनकी व्याख्या काफी विश्वस्तरीय है और इनका उपयोग गणितीय गणनाओं में विभिन्न प्रकार से किया जाता है. यह वैदिक सूत्र न केवल हमारी गणना करने की क्षमता को बढ़ाते हैं साथ ही साथ यह हमें गणित व बीजगणित की समस्याओं को हल करने का एक नया दृष्टिकोण भी देता है. यहाँ हम जिन वैदिक सूत्रों का उपयोग कर रहे हैं. उन्हें दो श्रेणियों में बाँटा गया है : वैदिक सूत्र अंकगणितीय की गणनों में और वैदिक सूत्र बीजगणितीय गणनाओं में.

अंकगणितीय गणनाओं में उपयोगी वैदिक गणित सूत्र.

- एकाधिकेन पूर्वेण (Ekādhikena Pūrvena)
  पहले से एक अधिक.
- निखिलं नवतश्चरमं दशतः (Nikhilam Navatas'caramam Das'atah)
  आखिरी 10 से बाकी 9 से.
- ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (Ũrdhva–tiryagbhyam̃)
  ऊर्ध्व व त्रियक.
- यावदूनम् (Yāvadūnam)/जो भी पूरक है.
- परावर्त्य योजयेत् (Parāvartya Yojayet)/पक्षान्तरण व समायोजन.
- एकन्यूनेन पूर्वेण (Ekanyūnena Pūrvena)/पहले से एक कम 10 है.
- आन्त्योर्दशकेऽपि (Antyayordas'ake'pi)/जब अन्तिम अंकों का योग.
- व्यष्टि-समष्टि (Vyasti-Samasti)/व्यष्टित और समस्त.
- गुणक समुच्चयः समुच्चयः गुणक (Gunakasamuccaya samuccaya-gunaka)/समुच्चय के पदों का योग, पदों के गुणा के बराबर है.

बीजगणितीय गणनाओं में उपयोगी वैदिक गणित सूत्र

- परावर्त्य योजयेत् (Parāvartya Yojayet)
  पक्षान्तरण व समायोजन

- सोपान्त्यद्वयमन्त्यम् (Sopāntyadvayamantyam)/अन्तिम व उससे पहले का दोगुना.
- पूरणापूरणाभ्यां (Pūranaapūrnābhyām)/पूर्णता व अपूर्णता से.
- आनुरूप्ये शून्यंअन्यत् (Ānurūpye Sūnyamanyat)/यदि एक अनुपात में हैं तो दूसरा शून्य होगा.
- संकलन व्यवकलनाभ्याम् (Sankalana Vyavakalanābhyam)/जोड़ना व घटाना.
- आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन (Ādyamādyenāntyamantyena)/पहले से पहला, अन्तिम से अन्तिम.
- अन्त्ययोरेव (Antyayoreva)/(अन्तिम पद से).
- लोपंस्थापनाभ्याम् (Lopanasthāpanābhyam)/पदों को हटा कर व छोड़ कर
- गुणित समुच्चयः समुच्चय गुणित
  (Gunitasamuccayah Samuccayagunitah)
  पदों का योग पदों के योग के गुणा के बराबर.
- शून्यं साम्य समुच्चये (Sunyam Sāmyasamuccaye)
  जब कोई व्यंजक समान है तो व व्यंजक शून्य है.

वैदिक सूत्र
अंकगणितीय गणनाओं में

यहाँ पर हम वैदिक सूत्रों की व्याख्या करेंगे व उनका अर्थ क्या है इसे समझेंगे.

वैदिक सूत्रों का उपयोग किस प्रकार गुणा, वर्ग, भाग, घन आदि में किया जाता है. इस प्रक्रिया को भी समझेंगे.

एकाधिकेन पूर्वेण

हिन्दी अनुवाद : *पहले से एक ज्यादा.*

गणितीय अर्थ : अगली संख्या को पाने के लिए पहली में एक जोड़ें.

उदाहरण :

2 पाने के लिए; 1 में 1 जोड़ें; $(1 + 1) = 2$

3 पाने के लिए; 2 में 1 जोड़ें; $(2 + 1) = 3$

4 पाने के लिए; 3 में 1 जोड़ें; $(3 + 1) = 4$

5 पाने के लिए; 4 में 1 जोड़ें; $(4 + 1) = 5$

6 पाने के लिए; 5 में 1 जोड़ें; $(5 + 1) = 6$

7 पाने के लिए; 6 में 1 जोड़ें; $(6 + 1) = 7$

8 पाने के लिए; 7 में 1 जोड़ें; $(7 + 1) = 8$

9 पाने के लिए; 8 में 1 जोड़ें; $(8 + 1) = 9$

उदाहरण : 6, 7, 20, 25 के लिए क्रमशः अगली संख्या लिखें.

6 से अगला अंक है $(6 + 1) = 7$

7 से अगला अंक है $(7 + 1) = 8$

20 से अगला अंक है $(20 + 1) = 21$

25 से अगला अंक है $(25 + 1) = 26$.

अभ्यास

'एकाधिकेन पूर्वेण' का उपयोग कर अगली संख्या लिखें.

1. 25 — उत्तर—26
2. 29 — उत्तर—30
3. 68 — उत्तर—69
4. 100 — उत्तर—101
5. 46 — उत्तर—47
6. 55 — उत्तर—56
7. 96 — उत्तर—97
8. 7 — उत्तर—8
9. 11 — उत्तर—12
10. 1001 — उत्तर—1002

5 से समाप्त होने वाली संख्या का वर्ग

पग-1 : *(आखिरी अंक 5 को छोड़कर) सभी अंकों का अगले अंक से गुणा करें.*

पग-2 : *(5 का वर्ग), 25 लिखें.*

उदाहरण : 25 का वर्ग करें.

$(25)^2 = [2 \times (2 + 1)]\ 25 = [2 \times 3]\ 25 = 625$

उदाहरण : 105 का वर्ग करें.

$(105)^2 = [10 \times (10 + 1)]\ 25 = [10 \times 11]\ 25 = 11025.$

उदाहरण : 45, 35 व 505 का वर्ग करें.

$(45)^2 = [4 \times (4 + 1)]\ 25 = [4 \times 5]\ 25 = 2025.$

$(35)^2 = [3 \times (3 + 1)]\ 25 = [3 \times 4]\ 25 = 1225.$

$(505)^2 = [50 \times (50 + 1)]\ 25 = [50 \times 51]\ 25$

$= [2550]\ 25 = 255025.$

45, 35 व 505 का वर्ग क्रमशः 2025, 1225 व 255025 है.

अभ्यास

1. 15 का वर्ग करें. उत्तर—225
2. 65 का वर्ग करें. उत्तर—4225
3. 125 का वर्ग करें. उत्तर—15625
4. 145 का वर्ग करें. उत्तर—21025
5. 105 का वर्ग करें. उत्तर—11025
6. 95 का वर्ग करें. उत्तर—9025
7. 85 का वर्ग करें. उत्तर—7225
8. 405 का वर्ग करें. उत्तर—164025
9. 155 का वर्ग करें. उत्तर—24025
10. 75 का वर्ग करें. उत्तर—5625

निखिलं नवतश्चरमं दशतः

हिन्दी अनुवाद : आखिरी 10 से, बाकी 9 से.

गणितीय अर्थ : किसी संख्या का अपने अगले आधार (क्रियात्मक आधार) से पूरक जानने के लिए, (आखिरी अंक को छोड़कर) सभी अंकों को 9 में से घटाएं व आखिरी अंक को 10 में से घटाएं.

उदाहरण : 1, 2, 3,..., 7, 8, 9 के (क्रियात्मक आधार 10 से) पूरक क्रमशः (10 – 1), (10 – 2), (10 – 3),..., (10 – 9) अर्थात् 9, 8, 7,..., 3, 2, 1 है.

उदाहरण : 36 का (क्रियात्मक आधार 100) से पूरक पाने के लिए, घटाएं; अंक 3 को 9 में से = 6; और 6 को 10 में से = 4 अर्थात्, 64, अतः 36 का पूरक है 64.

उदाहरण : 13579 का (क्रियात्मक आधार 100000) का पूरक पाने के लिए, घटाएं.

1 को 9 में से = 8; 3 को 9 में से = 6; 5 को 9 में से = 4; 7 को 9 में से = 2; और 9 को 10 में से = 1, अर्थात् 86421.

13579 का पूरक है 86421.

विशेष : यदि कोई संख्या शून्य से समाप्त होती है, तो अशून्य अंक को अन्तिम अंक माना जाता है और अन्तिम शून्यों को अन्त में लिख देते हैं.

उदाहरण : 4800 का पूरक पाने के लिए घटाएं;

4 को 9 में से = 5; और 8 को 10 में से = 2 अर्थात् 52.

4800 का पूरक है 5200.

विशेष : किसी संख्या व उसके पूरक का क्रियात्मक आधार सदा एक ही होता है.

अभ्यास

संख्या का पूरक व उसके क्रियात्मक आधार को लिखें (क्रियात्मक आधार में शून्यों की संख्या)

1. 45 — उत्तर—55 क्रियात्मक आधार 100 (2)
2. 64 — उत्तर—36 क्रियात्मक आधार 100 (2)
3. 6579 — उत्तर—3421 क्रियात्मक आधार 10000 (4)
4. 23694 — उत्तर—76306 क्रियात्मक आधार 100000 (5)
5. 463217 — उत्तर—536783 क्रियात्मक आधार 1000000 (6)
6. 10001 — उत्तर—89999 क्रियात्मक आधार 100000 (5)
7. 12000 — उत्तर—88000 क्रियात्मक आधार 100000 (5)
8. 12800 — उत्तर—87200 क्रियात्मक आधार 100000 (5)
9. 120120 — उत्तर—879880 क्रियात्मक आधार 1000000 (6)
10. 99999 — उत्तर—1 क्रियात्मक आधार 100000 (5)

3. 14 उत्तर—पूरक – 4, अधिकाय 4, क्रियात्मक आधार 10

4. 1113 उत्तर—पूरक – 113, अधिकाय 113, क्रियात्मक आधार 1000

5. 205 उत्तर—पूरक – 105, अधिकाय 105, क्रियात्मक आधार 100

6. 16 उत्तर—पूरक – 6, अधिकाय 6, क्रियात्मक आधार 10

विशेष—जब कोई संख्या अपने अगले आधार के पास होती है तो पूरक अगले आधार को क्रियात्मक आधार मानता है. जब कोई संख्या अपने पिछले आधार के पास होती है तो पूरक पिछले आधार को क्रियात्मक आधार मानता है अर्थात् अधिकाय.

गुणा—जब संख्या अपने आधार के पास हो

पग-1 : संख्या व उसके पूरक लिखें.

पग-2 : ■ *गुणा के दो भाग होंगे.*

दायाँ पक्ष : पूरकों का गुणा.

बायाँ पक्ष : तिर्यक ऋण : किसी भी एक संख्या में से दूसरे के पूरक को घटाएँ (धन हासिल).

■ *यदि दाएँ पक्ष में पूरकों के गुणनफल में प्राप्त संख्या में अंकों की संख्या क्रियात्मक आधार के शून्यों से ज्यादा है, तो शून्यों के बराबर गुणनफल के अंकों को लिख लेते हैं और शेष अंकों का हासिल के रूप में बाएँ पक्ष में पक्षान्तर कर देते हैं.*

जब दोनों संख्याएँ, आधार से छोटी हों.

उदाहरण : 8 का 7 से गुणा.

यहाँ 8 व 7 दोनों क्रियात्मक आधार (10) से छोटे हैं.

पग 1 : संख्या और उनके पूरक लिखें.

(10)
8 2
7 3

पग 2 : दायाँ पक्ष : पूरकों का गुणा

$2 \times 3 = 6$

(10)
8 2
7 3
6

बायाँ पक्ष : तिर्यक ऋण : एक संख्या को दूसरे के पूरक् से घटाएं

$8 - 3 = 5$

या $7 - 2 = 5$.

5/6

(10)
8 2
7 3
5/6

उत्तर—56.

उदाहरण : 98 का 76 से गुणा.

यहाँ दोनों संख्याएं क्रियात्मक आधार 100 से छोटी हैं.

पग 1 : संख्या व उनके पूरक लिखें.

(100)

98 2

76 24

पग 2 : *दायाँ पक्ष :* $2 \times 24 = 48$

बायाँ पक्ष : $76 - 2 = 74$

$98 - 24 = 74$

74/48

(100)

98 2

76 24

74 / 48

उत्तर—7448.

जब दोनों संख्याएं आधार से बड़ी हों.

उदाहरण : 112 का 108 से गुणा.

यहाँ क्रियात्मक आधार 100 है और संख्या क्रियात्मक आधार से बड़ी है.

पग 1 : संख्या व उनके पूरक लिखें.

(100)

112 (– 12)

108 (– 8)

पग 2 : *दायाँ पक्ष :* $(-12) \times (-8) = 96$

बायाँ पक्ष : $112 - (-8)$

$= 112 + 8 = 120$

120/96

(100)

112 (– 12)

108 (– 8)

120 / 96

उत्तर—12096.

उदाहरण : 125 का 111 से गुणा.

यहाँ क्रियात्मक आधार (100) है व दोनों संख्याएं क्रियात्मक आधार से बड़ी हैं.

पग 1 : संख्या व उनके पूरक लिखें

(100)

125 (– 25)

111 (– 11)

पग 2 : *दायाँ पक्ष* : $(-25) \times (-11) = 275$

बायाँ पक्ष : $125 - (-11)$

$= 125 + 11 = 136$

$\therefore$ बायाँ पक्ष 275 में अंकों की संख्या = 3

व क्रियात्मक आधार (100) में 2 अंक है.

$\therefore$ 2 को हासिल में बायाँ पक्ष में ले जाएंगे.

$136 / 275 = (136 + 2) / 75$

(100)
125 (– 25)
111 (– 11)
138 / 75

उत्तर—13875.

उदाहरण : 105 का 117 से गुणा.

पग 1 :

(100)
105 (– 5)
117 (– 17)

पग 2 : *दायाँ पक्ष* : $(-5) \times (-17) = 85$

बायाँ पक्ष : $(105) - (-17)$

$= 105 + 17 = 122$

122/85

(100)
105 (– 5)
117 (– 17)
122 / 85

उत्तर—12285.

जब एक संख्या आधार से बड़ी व दूसरी आधार से छोटी हो.

पग 1	: *संख्या व पूरक लिखें.*
पग 2	: ■ *दायाँ पक्ष : आधार + पूरकों का गुणा.*
	■ *बायाँ पक्ष : त्रिक ऋण – 1. (+ हासिल)*

उदाहरण : 107 का 96 से गुणा.

यहाँ क्रियात्मक आधार 100 है.

पग 1 : संख्या व उसके पूरक लिखें.

(100)
107 (– 7)
96 4

पग 2 : *दायाँ पक्ष* : आधार + पूरकों का गुणा

$100 + [(-7) \times 4] = 100 - 28 = 72$

बायाँ पक्ष : तिर्यक ऋण – 1

$[107 - 4] - 1 = 103 - 1 = 102$

102/72

(100)

107 (– 7)

96 4

102 / 72

उत्तर—10272.

उदाहरण : 998 का 1112 से गुणा.

यहाँ क्रियात्मक आधार 1000 है.

पग 1 : संख्या व उसके पूरक लिखें.

(1000)

998 2

1112, (– 112)

पग 2 : *दायाँ पक्ष* : $1000 + (2 \times -112)$

$= 1000 - 224 = 776$

बायाँ पक्ष : $(1112 - 2) - 1$

$= 1110 - 1 = 1109$

1109/776.

(1000)

998 2

1112 (– 112)

1109 / 776

उत्तर—1109776.

उदाहरण : 7 का 13 से गुणा.

यहाँ क्रियात्मक आधार 10 है.

पग 1 : संख्या व उसके पूरक

(10)

7 3

13 – 3

पग 2 : *दायाँ पक्ष* : $10 - (3 \times -3)$

$= 10 - 9 = 1$

बायाँ पक्ष : $(13 - 3) - 1$

$= 10 - 1 = 9$

9/1

(10)

7 3

13 – 3

9 / 1

उत्तर—91.

अभ्यास

जब दोनों संख्याएं आधार से बड़ी हैं.

1. 96 × 97 — उत्तर—9312
2. 95 × 97 — उत्तर—9215
3. 6 × 7 — उत्तर—42
4. 9 × 8 — उत्तर—72
5. 91 × 88 — उत्तर—8008
6. 997 × 996 — उत्तर—993012
7. 993 × 983 — उत्तर—976119
8. 9999 × 9998 — उत्तर—99970002
9. 888 × 999 — उत्तर—887112
10. 99 × 98 — उत्तर—9702

जब दोनों संख्याएं आधार से बड़ी हैं.

1. 11 × 12 — उत्तर—132
2. 111 × 112 — उत्तर—12432
3. 11 × 14 — उत्तर—154
4. 116 × 126 — उत्तर—14616
5. 107 × 111 — उत्तर—11877
6. 103 × 112 — उत्तर—11536
7. 107 × 117 — उत्तर—12519
8. 117 × 116 — उत्तर—13572
9. 115 × 125 — उत्तर—14375
10. 109 × 119 — उत्तर—12971

जब एक संख्या आधार से बड़ी व दूसरी छोटी है.

1. 11×9 उत्तर—99
2. 9×16 उत्तर—144
3. 16×8 उत्तर—128
4. 99×111 उत्तर—10989
5. 112×97 उत्तर—10864
6. 124×88 उत्तर—10912
7. 136×76 उत्तर—10336
8. 125×95 उत्तर—11875
9. 115×85 उत्तर—9775
10. 1115×992 उत्तर—1106080

एकन्यूनेन पूर्वेण

हिन्दी अनुवाद : पहले से एक कम.

गणितीय अर्थ : पहले से एक कम.

उदाहरण : 45 से एक कम $45 - 1 = 44$.

उदाहरण : 100 से एक कम $100 - 1 = 99$.

अभ्यास

मौखिक करें (अपने से एक कम संख्या लिखें).

1. 9999 — उत्तर—9998
2. 9897 — उत्तर—9896
3. 1000 — उत्तर—999
4. 555 — उत्तर—554
5. 6679 — उत्तर—6678
6. 1112 — उत्तर—1111
7. 11111 — उत्तर—11110
8. 101010 — उत्तर—101009
9. 100001 — उत्तर—100000
10. 202020 — उत्तर—202019

गुणा—9, 99, 999,...से

जबकि गुणक व गुण्य दोनों का आधार एक ही है.

पग 1 : ■ *बायाँ पक्ष : गुणक से एक कम.*
■ *दायाँ पक्ष : गुणक का पूरक. अर्थात् (आधार–गुणक)*

उदाहरण : 3, 5, 7 का 9 से गुणा करें.
यहाँ 9 व संख्याओं का आधार 10 है.

$3 \times 9 = [3 - 1]\,[10 - 3] = 27$

$5 \times 9 = [5 - 1]\,[10 - 5] = 45$

$7 \times 9 = [7 - 1]\,[10 - 7] = 63$

$9 \times 9 = [9 - 1]\,[10 - 9] = 81$

उदाहरण : 67 का गुणा 99 से करें.
यहाँ गुणक 67 व गुण्य 99, दोनों का आधार 100 है.

$67 \times 99 = [67 - 1]\,[100 - 67] = 6633$

उदाहरण : 876 का गुणा 999 से करें.
यहाँ क्रियात्मक आधार 1000 है.

$876 \times 999 = [876 - 1]\,[1000 - 876] = 875124.$

अभ्यास

निम्न अंकों का गुणा 9 से करें.

1. 2 — उत्तर—18
2. 4 — उत्तर—36
3. 8 — उत्तर—72

निम्न अंकों का गुणा 99 से करें.

4. 69 — उत्तर—6831
5. 79 — उत्तर—7821
6. 89 — उत्तर—8811

निम्न अंकों का गुणा 9999 से करें.

7. 6792 — उत्तर—67913208
8. 7893 — उत्तर—78922107
9. 8914 — उत्तर—89131086
10. 9995 — उत्तर—99940005

आन्त्योर्दशकेऽपि

हिन्दी अनुवाद : जब अन्तिम अंकों का योग 10 हो.

गणितीय अर्थ : अन्तिम अंकों का योग आधार के बराबर है.

उदाहरण : यहाँ 14 व 16 के अन्तिम अंकों 4 और 6 का योग $4 + 6 = 10$ (आधार) है.

उदाहरण : यहाँ 13, 10, 17 के अन्तिम अंकों 3, 0 व 7 का योग $3 + 0 + 7 = 10$ (आधार) है.

उदाहरण : यहाँ 342 व 458 के अन्तिम अंकों 2 व 8 का योग $2 + 8 = 10$ (आधार) है, अथवा $42 + 58 = 100$ (आधार).

उदाहरण : यहाँ 1067, 2021 और 3521 के अन्तिम अंकों 67, 21 व 12 का योग $67 + 21 + 12 = 100$ (आधार) है.

अभ्यास

देखें अन्तिम अंकों का योग आधार के बराबर है?

1. 1112 और 1188 — हाँ $(12 + 88 = 100)$
2. 1127 और 1173 — हाँ $(27 + 73 = 100)$
3. 1333 और 1667 — हाँ $(33 + 67 = 100)$
4. 2567 और 2533 — हाँ $(67 + 33 = 100)$
5. 1159 और 1671 — हाँ $(9 + 1 = 10)$
6. 1135 और 1155 — हाँ $(5 + 5)$
7. 1122 और 1156 — नहीं
8. 1153 और 1160 — नहीं
9. 1137 और 1156 — नहीं
10. 23 और 57 — हाँ $(3 + 7 = 10)$

गुणा—जब अन्तिम अंकों का योग आधार है व पूर्व अंक समान है

पग 1 : ■ ***बायाँ पक्ष :*** *उन अन्तिम अंकों का आपस में गुणा जिनका योग आधार है.*

पग 2 : ■ ***दायाँ पक्ष :*** *पूर्व अंकों का अपने से अगली संख्या से गुणा.*

उदाहरण : 36 का 34 से गुणा.

यहाँ अन्तिम अंक का योग $6 + 4 = 10$ (आधार) व पूर्व अंक 3 है.

$$\therefore \quad 36 \times 34 = [3 \times (3 + 1)]\,[6 \times 4]$$
$$= [3 \times 4]\,[24]$$
$$= 1224.$$

उत्तर—1224.

उदाहरण : 260×240.

अन्तिम अंकों का योग $60 + 40 = 100$ (आधार) व पूर्व अंक 2 है.

$$260 \times 240 = [2 \times (2 + 1)]\,[60 \times 40]$$
$$= [2 \times 3]\,[2400] = 62400$$

उत्तर—62400.

उदाहरण : 114×116.

अन्तिम अंकों का योग $4 + 6 = 10$ (आधार) व पूर्व अंक 11 है.

$$114 \times 116 = [11 \times (11 + 1)]\,[4 \times 6]$$
$$= [11 \times 12]\,[24] = 13224$$

उत्तर—13224.

अभ्यास

गुणा करें.

1. 87×83 — उत्तर—7221
2. 112×118 — उत्तर—13216
3. 79×71 — उत्तर—5609
4. 1256×1254 — उत्तर—1575024
5. 37×33 — उत्तर—1221
6. 1589×1581 — उत्तर—2512209
7. 99×91 — उत्तर—9009
8. 44×46 — उत्तर—2024
9. 98×92 — उत्तर—9016

यावदूनम्

हिन्दी अनुवाद : जो भी पूरक हो.

गणितीय अर्थ : पूरक (निकटतम क्रियात्मक आधार पर).

उदाहरण : 87 का पूरक ज्ञात करें.

यहाँ 87 क्रियात्मक आधार 100 के पास है.

$\therefore$ पूरक $100 - 87 = 13$.

उदाहरण : 107 का पूरक ज्ञात करें.

यहाँ संख्या 107 क्रियात्मक आधार 100 के पास है.

$\therefore$ पूरक $100 - 107 = -7 = \overline{7}$.

अभ्यास

निम्नलिखित संख्याओं के पूरक पास के आधार पर प्राप्त करें.

1. 108 उत्तर—$(\overline{8})$
2. 112 उत्तर—$(\overline{12})$
3. 97 उत्तर—(3)
4. 87 उत्तर—13
5. 67 उत्तर—33
6. 105 उत्तर—$(\overline{5})$
7. 97 उत्तर—3
8. 88 उत्तर—12
9. 110 उत्तर—$(\overline{10})$
10. 115 उत्तर—$(\overline{15})$

वर्ग

किसी भी संख्या का वर्ग निम्न उपसूत्र से प्राप्त किया जा सकता है.

'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्'

हिन्दी अनुवाद : संख्या को पूरक से घटाने पर जो प्राप्त हो और पूरक का वर्ग.

पग 1 :	■ ***दायाँ पक्ष :*** *पूरक का वर्ग.*
पग 2 :	■ ***बायाँ पक्ष :*** *संख्या को उसके पूरक से घटाएं (धन हासिल).*

यहाँ दाएँ पक्ष में आधार के शून्य के बराबर अंक होने चाहिए. यदि अंकों की संख्या कम है तो उसके आगे शून्य जोड़ें और यदि अंकों की संख्या ज्यादा है तो पूर्व अंकों को हासिल मान कर बाएँ पक्ष में जोड़ दें.

उदाहरण : 96 का वर्ग करें.

यहाँ क्रियात्मक आधार 100 है और पूरक 4 है.

पग 1 : ■ **दायाँ पक्ष :** पूरक का वर्ग करें $[4^2]$.

पग 2 : ■ **बायाँ पक्ष :** संख्या को उसके पूरक से घटाएं.

$[96 - 4]$.

$(96)^2 = [96 - 4]\ [4^2] = [92]\ [16]$.

उत्तर—9216.

उदाहरण : 112 का वर्ग करें.

यहाँ पूरक – 12 और क्रियात्मक आधार 100 है.

$(112)^2 = [112 - (-12)]\ [(-12)^2] = [112 + 12]\ [144]$

यहाँ दाएँ पक्ष [144] में तीन अंक हैं अर्थात् एक अंक, क्रियात्मक आधार 100 के शून्यों की संख्या से ज्यादा.

∴ [144] से 1 एक हासिल करें.

$(112)^2 = [124]\ [144] = [124 + 1]\ [44] = 12544$

उत्तर—12544.

उदाहरण : $(9992)^2 = ?$

पूरक 8 और क्रियात्मक आधार 10000.

$(9992)^2 = [9992 - 8]\ [8^2] = [9984]\ [64]$

यहाँ क्रियात्मक आधार में 4 शून्य हैं. और दाएँ पक्ष में केवल 2 अंक, अतएव, अंकों के पूर्व में दो शून्य जोड़ें.

$(9992)^2 = [9984]\ \underline{[0064]} = 99840064$

उत्तर—99840064.

उदाहरण : $(998)^2 = ?$

पूरक 2, और आधार 1000 है.

$(998)^2 = [998 - 2]\ [2^2] = [996]\ [4] = [996]\ \underline{[004]} = 996004.$

उत्तर—996004.

अभ्यास

वर्ग करें :

1. 99 — उत्तर—9801
2. 9996 — उत्तर—99920016
3. 992 — उत्तर—984064
4. 997 — उत्तर—994009
5. 990 — उत्तर—980100
6. 995 — उत्तर—990025
7. 987 — उत्तर—974169
8. 112 — उत्तर—12544
9. 116 — उत्तर—13456
10. 105 — उत्तर—11025

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

हिन्दी अनुवाद : उर्ध्व व तिर्यक.

गणितीय अर्थ : (i) उर्ध्व गुणा

(ii) तिर्यक गुणा

(iii) उर्ध्व और तिर्यक गुणा

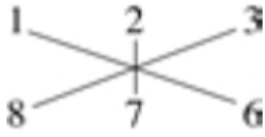
उदाहरण : 3 व 5 का उर्ध्व गुणा.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ \hline 3 \times 5 \end{array}$$

उदाहरण : (3, 5) व (6, 7) का तिर्यक गुणा.

$$(3 \times 7) + (6 \times 5)$$

उदाहरण : (1, 2, 3) व (8, 7, 6) का उर्ध्व व तिर्यक गुणा.



$$(1 \times 6) + (2 \times 7) + (3 \times 8)$$

उदाहरण : (1, 2, 3) और (8, 9, 5) के उर्ध्व, तिर्यक और उर्ध्व व तिर्यक गुणा प्राप्त करें.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \\ \hline \end{array}$$

उर्ध्व गुणा 1 और 8 का 1×8.

उर्ध्व गुणा 2 और 9 का 2×9.

उर्ध्व गुणा 3 और 5 का 3×5.

तिर्यक गुणा $\overline{(1\ 2)}$ और $\overline{(8\ 9)}$ का $(1 \times 9) + (2 \times 8)$.

तिर्यक गुणा $\overline{(2\ 3)}$ और $\overline{(9\ 5)}$ का $(2 \times 5) + (3 \times 9)$.

उर्ध्व व तिर्यक गुणा $\overline{(1\ 2\ 3)}$ और $\overline{(8\ 9\ 5)}$ का

$(1 \times 5) + (2 \times 9) + (3 \times 5)$.

अभ्यास

1. *abc* और *efg* के उर्ध्व गुणा ज्ञात करें. उत्तर—*ae*, *bf* और *cg*.
2. *abc* और *efg* के तिर्यक गुणा ज्ञात करें. उत्तर—$(af + be)$, $(bg + cf)$
3. *abc* और *efg* के उर्ध्व व तिर्यक गुणा ज्ञात करें. उत्तर—$(ag + bf + ce)$
4. 1234 और 7890 के सभी उर्ध्व गुणा ज्ञात करें.

   उत्तर—(1×7), (2×8), (3×9), (4×0)
5. 56 और 67 के तिर्यक गुणा ज्ञात करें. उत्तर—71
6. 98 और 00 के तिर्यक गुणा ज्ञात करें. उत्तर—0
7. 362 और 134 के उर्ध्व व तिर्यक गुणा ज्ञात करें. उत्तर—32

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र जोकि अभी बताया गया है, उसकी व्याख्या *'आन्तर बाह्य परिणाम'* के रूप में अधिक सफलता से की जा सकती है.

हम अधिक अच्छे परिणाम के लिए आन्तर बाह्य परिणाम का उपयोग, तिर्यक गुणा के लिए करेंगे.

आन्तर-बाह्य परिणाम :

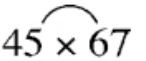
जब गुणक व गुण्य में अंकों की संख्या समान हो तो—

- ***गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक दाहिने अंक का, गुणक के उत्तरोत्तर प्रत्येक बायें अंक से गुणा करें.***
- ***प्रत्येक गुणा को जोड़ें.***

उदाहरण : 45 और 67 का आन्तर-बाह्य परिणाम ?

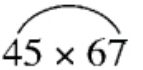
- गुण्य के 5 का गुणक के 6 से गुणा करें;

  5×6



- गुण्य के 4 का गुणक के 7 से गुणा करें;

  4×7



- प्रत्येक गुणा को जोड़ें

  $(5 \times 6) + (4 \times 7) = 30 + 28 = 58.$

  आन्तर-बाह्य परिणाम = 58

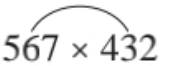
उदाहरण : 567 और 432 का आन्तर-बाह्य परिणाम ?

- गुण्य के 7 का गुणक के 4 से गुणा करें;

  7×4

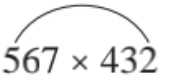
- गुण्य के 6 का गुणक के 3 से गुणा करें;

  6×3



- गुण्य के 5 का गुणक के 2 से गुणा करें;

  5×2



- प्रत्येक गुणा को जोड़ें;

  $(7 \times 4) + (6 \times 3) + (5 \times 2)$

  $= 28 + 18 + 10 = 56$

  आन्तर-बाह्य परिणाम = 56.

अभ्यास

निम्नलिखित जोड़ों का आन्तर-बाह्य परिणाम ज्ञात करें—

1. (56) और (17) — उत्तर—41
2. (83) और (92) — उत्तर—43
3. (87) और (56) — उत्तर—83
4. (35) और (46) — उत्तर—38
5. (15) और (24) — उत्तर—14

निम्नलिखित त्रिकों का आन्तर-बाह्य परिणाम ज्ञात करें—

1. (321) व (654) — उत्तर—28
2. (703) व (654) — उत्तर—46
3. (870) व (654) — उत्तर—67
4. (021) व (543) — उत्तर—13
5. (987) व (654) — उत्तर—118

निम्नलिखित चतुष्कों का आन्तर-बाह्य परिणाम ज्ञात करें—

1. (7021) और (6543) — उत्तर—37
2. (8702) और (6543) — उत्तर—64
3. (6543) और (9870) — उत्तर—94

द्रुत गुणा

द्रुत गुणा–पहला कदम

द्रुत गुणा करने से पहले, हम कुछ प्रारम्भिक बातों को दोहराना चाहेंगे.

(i) गणित में 0, 1, 2, 3, ..., 9 अंक (digit) कहलाते हैं.

एक या अधिक अंकों से मिलकर संख्या (Number) बनती है.

(ii) जब दो (या अधिक) अंकों का आपस में गुणा करते हैं (या वर्ग) करते हैं तो परिणाम में एक या दो (या अधिक) अंकों की संख्या प्राप्त होती है.

एक अंक के परिणाम को दो अंकों में लिखने के लिए आगे शून्य (0) लगायें.

जैसे— $2 \times 3 = 06$ (6 नहीं)

$4 \times 2 \times 1 = 08$ (8 नहीं)

(iii) **हासिल का नियम** : *प्राप्त परिणाम में दाहिने अंक को लिखते हैं और पूर्व अंकों को हासिले पर ले जाते हैं.*

जैसे—6 और 9 का गुणा करें.

6 और 9 का गुणा का परिणाम है 54; $6 \times 9 = 54$, लिखें 4 और 5 को हासिले पर ले जायें.

पग 3 : गुण्य के बायें अंक 9 का गुणक के बायें अंक 3 से

$9 \times 3 = 27$;

धन हासिल 4;

$27 + 4 = 31$; लिखें 31.

$\overset{\frown}{98 \times 32}$

3136

उत्तर—3136

अभ्यास

1. गुणा 89 का 63 से. उत्तर—5607
2. गुणा 69 का 42 से. उत्तर—2898
3. गुणा 87 का 78 से. उत्तर—6786
4. $49 \times 89 =$ ..... उत्तर—4361
5. $29 \times 96 =$ ..... उत्तर—2784
6. $48 \times 56 =$ ..... उत्तर—2688
7. $99 \times 79 =$ ..... उत्तर—7821
8. $67 \times 76 =$ ..... उत्तर—5092
9. $77 \times 29 =$ ..... उत्तर—2233

गुणा–दो अंक के गुणक से

पग 1	*: गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा गुणक के सबसे दायें अंक से करें.*
पग 2	*: उत्तरोत्तर गुण्य के प्रत्येक अंकों के जोड़ें और गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 3	*: गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा गुणक के सबसे दायें अंक से करें.*

उदाहरण : गुणा 987432 का 56 से. $\underline{987432 \times 56}$

पग 1 : गुण्य के सबसे दायें अंक 2 का गुणा
गुणक के सबसे दायें अंक 6 से करें
$2 \times 6 = 12$; लिखें 2, हासिले पर 1

$$\frac{987432 \times 56}{2}$$

पग 2 : जोड़ें 32 व गुणक 56 का
आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 1)
$[(2 \times 5) + (3 \times 6)] + 1$
$= 10 + 18 + 1 = 29$;
लिखें 9, हासिले पर 2

$$\frac{987432 \times 56}{92}$$

- जोड़ें 43 व गुणक 56 का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 2)
  $[(3 \times 5) + (4 \times 6)] + 2$
  $= 15 + 24 + 2 = 41$;
  लिखें 1 हासिले पर 4

$$\frac{987432 \times 56}{192}$$

- जोड़ें 74 व गुणक 56 का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 4)
  $[(4 \times 5) + (7 \times 6)] + 4$
  $= 20 + 42 + 4 = 66$;
  लिखें 6 हासिले पर 6

$$\frac{987432 \times 56}{6192}$$

■ जोड़ें 87 व गुणक 56 का आन्तर-बाह्य परिणाम

$[(7 \times 5) + (8 \times 6)] + 6$ (हासिल)

$= 35 + 48 + 6 = 89;$

लिखें 9, हासिले पर 8

$$\frac{987432 \times 56}{96192}$$

■ जोड़ें 98 व गुणक 56 का आन्तर-बाह्य परिणाम

$[(8 \times 5) + (9 \times 6)] + 8$ (हासिल)

$= 40 + 54 + 8 = 102;$

लिखें 2, हासिले पर 10

$$\frac{987432 \times 56}{296192}$$

पग 3 : गुण्य के सबसे बायें अंक 9 का गुणा

गुणक के सबसे बायें अंक 5 से

(धन हासिल 10)

$(9 \times 5) + 10 = 45 + 10 = 55;$

लिखें 55

$$\frac{987432 \times 56}{55296192}$$

उत्तर—55296192

अभ्यास

1. गुणा 998641 का 76 से. उत्तर—75896716
2. गुणा 110011 का 33 से. उत्तर—3630363
3. गुणा 666666 का 77 से. उत्तर—51333282
4. $7779 \times 68 =$ ..... उत्तर—528972
5. $297640 \times 95 =$..... उत्तर—28275800
6. गुणा 9999 का 99 से. उत्तर—989901
7. गुणा 101010 का 66 से. उत्तर—6666660
8. गुणा 987654 का 17 से. उत्तर—16790118
9. गुणा 123456 का 13 से. उत्तर—1604928
10. गुणा 694356 का 75 से. उत्तर—52076700

गुणा–तीन अंक के गुणक से

पग 1	*: गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा गुणक के सबसे दायें अंक से करें.*
पग 2	*: गुण्य के सबसे दायें जोड़ें व गुणक के सबसे दायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 3	*: गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक त्रिक व गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 4	*: गुण्य के सबसे बायें जोड़ें व गुणक के सबसे बायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 5	*: गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा गुणक के सबसे बायें अंक से.*

उदाहरण : गुणा करें 9870321 का 654. 9870321×654

पग 1 : गुणा 1 का 4 से

$1 \times 4 = 4$;

लिखें 4

$$\underset{4}{9870321 \times 654}$$

पग 2 : जोड़ें 21 व जोड़ें 54 का आन्तर-बाह्य परिणाम

$[(1 \times 5) + (2 \times 4)] = 5 + 8 = 13$;

लिखें 3, हासिले पर 1

$$\underset{34}{9870321 \times 654}$$

पग 3 : ■ त्रिक (321) व गुणक (654) का
आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 1)

$[(1 \times 6) + (2 \times 5) + (3 \times 4)] + 1$ (हासिल)
$= 6 + 10 + 12 + 1 = 29$;

लिखें 9, हासिले पर 2

$$\underset{934}{9870321 \times 654}$$

■ त्रिक (032) व गुणक (654) का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 2)

$[(2 \times 6) + (3 \times 5) + (0 \times 4)] + 2$ (हासिल)
$= 12 + 15 + 0 + 2 = 29;$

लिखें 9, हासिले पर 2

9870321 × 654
9934

■ त्रिक (703) व गुणक (654) का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 2)

$[(3 \times 6) + (0 \times 5) + (7 \times 4)] + 2$ (हासिल)
$= 18 + 0 + 28 + 2 = 48;$

लिखें 8, हासिले पर 4

9870321 × 654
89934

■ त्रिक (870) व गुणक (654) का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 4)

$[(0 \times 6) + (7 \times 5) + (8 \times 4)] + 4$ (हासिल)
$= 0 + 35 + 32 + 4 = 71;$

लिखें 1, हासिले पर 7

9870321 × 654
189934

■ त्रिक (987) व गुणक (654) का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 7)

$[(7 \times 6) + (8 \times 5) + (9 \times 4)] + 7$ (हासिल)
$= 42 + 40 + 36 + 7 = 125;$

लिखें 5, हासिल 12

9870321 × 654
5189934

पग 4 : जोड़ा (98) व जोड़ा (65) का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 12)

$[(8 \times 6) + (9 \times 5)] + 12$ (हासिल)
$= 48 + 45 + 12 = 105;$

लिखें 5, हासिल पर 10

9870321 × 654
55189934

पग 5 : 9 का 6 से गुणा (धन हासिल 10)

$(9 \times 6) + 10 = 54 + 10 = 64;$

लिखें 64

9870321 × 654

6455189934

उत्तर—**6455189934**

अभ्यास

1. गुणा 23987 का 999 से. उत्तर—23963013
2. गुणा 23987 का 989 से. उत्तर—23723143
3. गुणा 23987 का 787 से. उत्तर—18877769
4. गुणा 23987 का 676 से. उत्तर—16215212
5. गुणा 23987 का 566 से. उत्तर—13576642
6. गुणा 17123 का 432 से. उत्तर—7397136
7. गुणा 17123 का 321 से. उत्तर—5496483
8. गुणा 17123 का 234 से. उत्तर—4006782
9. गुणा 17123 का 421 से. उत्तर—7208783
10. गुणा 17123 का 212 से. उत्तर—3630076

गुणा–चार अंक के गुणक से

पग 1	*गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा गुणक के सबसे दायें अंक से करें.*
पग 2	*गुण्य के सबसे दायें जोड़ें व गुणक के सबसे दायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 3	*गुण्य के सबसे दायें त्रिक व गुणक के सबसे दायें त्रिक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 4	*गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक चतुष्क का व गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 5	*गुण्य के सबसे बायें त्रिक व गुणक के सबसे बायें त्रिक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 6	*गुण्य के सबसे बायें जोड़ें व गुणक के सबसे बायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल).*
पग 7	*गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा गुणक के सबसे बायें अंक से.*

उदाहरण : गुणा 987021 का 6543 से

$$\underline{987021 \times 6543}$$

पग 1 : गुणा 1 का 3 से;

$1 \times 3 = 03;$

लिखें 3

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$3$$

पग 2 : जोड़ें (21) व (43) का आन्तर-बाह्य परिणाम

$[(1 \times 4) + (2 \times 3)]$

$= 4 + 6 = 10;$

लिखें 0, हासिल पर 1

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$03$$

पग 3 : त्रिक (021) व (543) का
आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल 1)

$[(1 \times 5) + (2 \times 4) + (0 \times 3)] + 1$

$= 5 + 8 + 0 + 1 = 14$

लिखें 4, हासिल पर 1

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$403$$

पग 4 : ■ चतुष्क (7021) व गुणक (6543) का आन्तर-बाह्य परिणाम + 1 (हासिल);

$[(1 \times 6) + (2 \times 5) + (0 \times 4) + (7 \times 3)] + 1$

$= 6 + 10 + 0 + 21 + 1 = 38;$

लिखें 8, हासिल पर 3

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$8403$$

■ चतुष्क (8702) व गुणक (6543) का आन्तर-बाह्य परिणाम + 3 (हासिल)

$[(2 \times 6) + (0 \times 5) + (7 \times 4) + (8 \times 3)] + 3$

$= 12 + 0 + 28 + 24 + 3 = 67;$

लिखें 7, हासिल पर 6

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$78403$$

■ चतुष्क (9870) व गुणक (6543) का आन्तर-बाह्य परिणाम + 6 (हासिल)

$[(0 \times 6) + (7 \times 5) + (8 \times 4) + (9 \times 3)] + 6$

$= 0 + 35 + 32 + 27 + 6 = 100;$

लिखें 0, हासिल पर 10

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$078403$$

पग 5 : त्रिक (987) व (654) का आन्तर-बाह्य परिणाम + 10 (हासिल);

$[(7 \times 6) + (8 \times 5) + (9 \times 4)] + 10$

$= 42 + 40 + 36 + 10 = 128;$

लिखें 8, हासिल पर 12

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$8078403$$

पग 6 : जोड़ें (98) व (65) का आन्तर-बाह्य परिणाम + 12 (हासिल);

$[(8 \times 6) + (9 \times 5)] + 12$

$= 48 + 45 + 12 = 105;$

लिखें 5, हासिल पर 10

$$\overline{\overline{987021 \times 6543}}$$
$$58078403$$

पग 7 : गुणा 9 का 6 से; + 10 (हासिल);

$9 \times 6 = 54 + 10$ (हासिल) $= 64;$

लिखें 64

$$\overline{987021 \times 6543}$$
$$6458078403$$

उत्तर—6458078403

अभ्यास

1. गुणा 246879 का 7777 से. उत्तर—1919977983
2. गुणा 164321 का 6666 से. उत्तर—1095363786
3. गुणा 1642316 का 5555 से. उत्तर—9123065380
4. गुणा 224466 का 4444 से. उत्तर—997526904
5. गुणा 5544779 का 3333 से. उत्तर—18480748407
6. गुणा 22336677 का 2222 से. उत्तर—49632096294
7. गुणा 121212 का 9876 से. उत्तर—1197089712

द्रुत गुणा
(एक समीक्षा)

आन्तर-बाह्य परिणाम :

जब गुण्य व गुणक में अंकों की संख्या समान है तब.

- गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक दाहिने अंक का गुणा, गुणक के उत्तरोत्तर प्रत्येक बायें अंक से.
- प्रत्येक गुणा को जोड़ें.

गुणा	पग
दो अंक के गुण्य का दो अंक के गुणक से	■ गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे दायें अंक से. ■ आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे बायें अंक से (धन हासिल).
गुणा	**पग**
दो अंक के गुणक से	■ गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे दायें अंक से. ■ गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक जोड़ें का व गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (धन हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे बायें अंक से (धन हासिल).
गुणा	**पग**
तीन अंक के गुणक से	■ गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे दायें अंक से. ■ गुण्य के सबसे दायें जोड़ें का व गुणक के सबसे दायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक त्रिक का व गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें जोड़ें का व गुणक के सबसे बायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे बायें अंक से (+ हासिल)

चार अंक के गुणक से	■ गुण्य के सबसे दायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे दायें अंक से. ■ गुण्य के सबसे दायें जोड़ें का व गुणक के सबसे दायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे दायें त्रिक का व गुणक के सबसे दायें त्रिक का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक चतुष्क का व गुणक का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें त्रिक का व गुणक के सबसे बायें त्रिक का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें जोड़ें का व गुणक के सबसे बायें जोड़ें का आन्तर-बाह्य परिणाम (+ हासिल). ■ गुण्य के सबसे बायें अंक का गुणा, गुणक के सबसे बायें अंक से (+ हासिल)

भाग

गुणा को समझने व करने के बाद अब हम भाग की ओर रुख करेंगे. भाग गुणा की तुलना में कुछ कठिन अवश्य है, परन्तु इतना नहीं कि हम उसे तेजी से न कर सकें.

आयें, जानें कुछ भाग के बारे में

भाग के चार अंग होते हैं–भाज्य (dividend), भाजक (divisor), भागफल (quotient) और शेषफल (remainder). इसकी इस प्रकार से व्याख्या की जा सकती है–

"भाजक वह संख्या है जो भाज्य का भाग करती है, उत्तर भागफल है और जो भाग के बाद बचता है वह शेषफल है."

उदाहरण : भाग 2862 का 4 से.

$$2862 \div 4 = 715 + 2$$

यहाँ भाजक 4 है, क्योंकि यह भाज्य 2862 का भाग करती है. भागफल है 715 (जोकि भाग का परिणाम है) और शेषफल है 2 (क्योंकि यह अन्त में बाकी बचा है).

इसे ऐसे भी समझें,

भाजक—*वह संख्या है जो भाग देती है.*

भाज्य—*वह संख्या है जिसका भाग होता है.*

भागफल—*परिणाम है भाग का.*

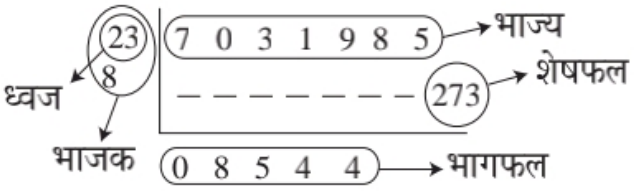
शेषफल—*जो बाकी बचा भाग के बाद. [शेषफल का मान सदैव भाजक से कम होता है]*

उदाहरण : भाग 7031985 का 823 से.

यहाँ 7031985 भाज्य है और 823 भाजक.

7031985 (भाज्य) में 823 (भाजक) से भाग देने पर देता है 8544 भागफल के रूप में व 273 शेषफल के रूप में. जिसे हम लिख सकते हैं–

7031985 ÷ 823 = 8544 + शेषफल 273.



यहाँ हमने भाजक 823 को 8^{23} के रूप में लिखा है, जहाँ 23 ध्वज कहलायेगा. ध्वज के बारे में इस अध्याय में हम आगे जानेंगे.

आन्तर-बाह्य परिणाम

जिस प्रकार हमने आन्तर-बाह्य परिणाम द्रुत गुणा में प्रयोग किये थे, यहाँ भाग में भी वह उपयोगी हैं.

आन्तर-बाह्य परिणाम—जब गुणक व गुण्य में अंकों की संख्या समान हो तो—

- गुण्य के उत्तरोत्तर प्रत्येक दायें अंक का गुणा, गुणक के उत्तरोत्तर प्रत्येक बायें अंक से.
- प्रत्येक गुणा को जोड़ें.

उदाहरण : 45 और 67 का आन्तर-बाह्य परिणाम.

- गुण्य के 5 का गुणक के 6 से गुणा करें;

  5×6 $\qquad\qquad$ 45×67

- गुण्य के 4 का गुणक के 7 से गुणा करें;

  4×7 $\qquad\qquad$ 45×67

- प्रत्येक गुणा को जोड़ें

  $(5 \times 6) + (4 \times 7) = 30 + 28 = 58.$

  आन्तर-बाह्य परिणाम = 58 $\qquad\qquad$ 45×67

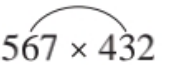
उदाहरण : 567 और 432 का आन्तर-बाह्य परिणाम ?

- गुण्य के 7 का गुणक के 4 से गुणा करें;

  7×4 $\qquad\qquad$ 567×432

- गुण्य के 6 का गुणक के 3 से गुणा करें;

  6×3



- गुण्य के 5 का गुणक के 2 से गुणा करें;

  5×2

- प्रत्येक गुणा को जोड़ें;

  $(7 \times 4) + (6 \times 3) + (5 \times 2)$

  $= 28 + 18 + 10 = 56$

  आन्तर-बाह्य परिणाम = 56.

उदाहरण : 23 और 36 का आन्तर-बाह्य परिणाम

$(3 \times 3) + (2 \times 6) = 9 + 12 = 21$

123 और 567 का आन्तर-बाह्य परिणाम

$(3 \times 5) + (2 \times 6) + (1 \times 7)$

$= 15 + 12 + 7 = 34$

विशेष : गुणा के विपरीत भाग में हम भाज्य की गणना बायें से दायें करते हैं.

भाग–एक अंक के भाजक से

शेषफल और उत्तरोत्तर अंक (बायें से दायें) का भाज्य से भाग दें.

उदाहरण : भाग 8396 का 6 से.

$$6 \overline{)\ 8\ 3\ 9\ 6}$$

शेषफल और उत्तरोत्तर अंक (बायें से दायें) का भाज्य से भाग दें.

- चूँकि यहाँ कोई शेषफल नहीं है,
  8 का भाग भाज्य 6 से;
  $8 \div 6 = 1$ शेषफल 2.

$$\begin{array}{r|l} & 8\ (3)\ 9\ 6 \\ 6 & \ \ (2) \\ \hline & 1 \end{array}$$

- भाग 23 (शेषफल 2, उत्तरोत्तर अंक 3) का भाज्य 6 से;
  $23 \div 6 = 3$ शेषफल 5.

$$\begin{array}{r|l} & 8\ 3\ (9)\ 6 \\ 6 & \ \ 2\ (5) \\ \hline & 1\ 3 \end{array}$$

- भाग 59 (शेषफल 5, उत्तरोत्तर अंक 9) का भाज्य 6 से;
  $59 \div 6 = 9$ शेषफल 5.

$$\begin{array}{r|l} & 8\ 3\ 9\ (6) \\ 6 & \ \ 2\ 5\ (5) \\ \hline & 1\ 3\ 9 \end{array}$$

- भाग 56 (शेषफल 5, उत्तरोत्तर अंक 6) का भाज्य 6 से;
  $56 \div 6 = 9$ शेषफल 2.

$$\begin{array}{r|l} & 8\ 3\ 9\ 6 \\ 6 & \ \ 2\ 5\ 5\ (2) \\ \hline & 1\ 3\ 9\ 9 \end{array}$$

उत्तर—भागफल 1399 शेषफल 2.

अभ्यास

1. भाग 454 का 3 से. — उत्तर—151 शेष 1
2. भाग 4112 का 3 से. — उत्तर—1370 शेष 2
3. भाग 6599 का 6 से. — उत्तर—1099 शेष 5

4. भाग 7455 का 6 से. उत्तर—1242 शेष 3
5. भाग 54871 का 9 से. उत्तर—6096 शेष 7
6 भाग 9292 का 7 से. उत्तर—1327 शेष 3
7. भाग 78005 का 3 से. उत्तर—26001 शेष 2
8. भाग 96058 का 6 से. उत्तर—16009 शेष 4
9. भाग 6501 का 3 से. उत्तर—2167
10. भाग 23654 का 8 से. उत्तर—2956 शेष 6

भाग–दो अंक के भाजक से

पग 1 : *भाग (भाज्य के पहले अंक) का (भाजक के पहले अंक) से.*

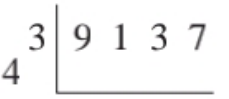
जाँच : *(शेषफल और भाज्य का उत्तरोत्तर अंक)*
– (ध्वज × भागफल) = ऋणात्मक संख्या में भागफल ऐसा चयन करें, जो उसे धनात्मक बनाये.

पग 2 : *भाजक के पहले अंक से भाग दें.*

जाँच : *(शेषफल और भाज्य का उत्तरोत्तर अंक)*
– (ध्वज × भागफल) = ऋणात्मक संख्या में भागफल ऐसा चयन करें, जो उसे धनात्मक बनाये.

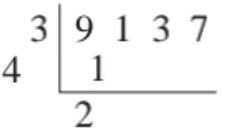
पग 3 : *(शेषफल और भाज्य का अन्तिम अंक) – (ध्वज × भागफल) = भाग का शेषफल.*

उदाहरण : भाग 9137 का 43 से



पग 1 : $9 \div 4 = 2$ शेषफल 1

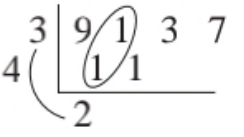
जाँच : $11 - (3 \times 2) = 11 - 6 = 5$



पग 2 : ■ $11 - (3 \times 2) = 11 - 6 = 5$;

$5 \div 4 = 1$ शेषफल 1.

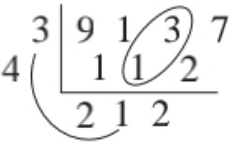
जाँच : $13 - (3 \times 1) = 13 - 3 = 10$



■ $13 - (3 \times 1) = 13 - 3 = 10$;

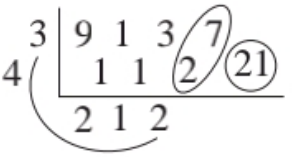
$10 \div 4 = 2$ शेषफल 2.

जाँच : $27 - (3 \times 2) = 27 - 6 = 21$

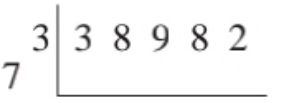


पग 3 : $27 - (3 \times 2) = 27 - 6 = 21.$

उत्तर—212 शेषफल 21.

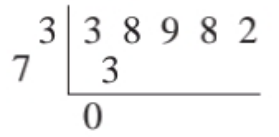


उदाहरण : भाग 38982 का 73 से



पग 1 : $3 \div 7 = 0$ शेषफल 3.

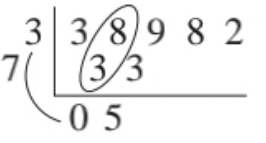
जाँच : $38 - (3 \times 0) = 38 - 0 = 38$



पग 2 : ■ $38 - (3 \times 0) = 38 - 0 = 38;$

$38 \div 7 = 5$ शेषफल 3.

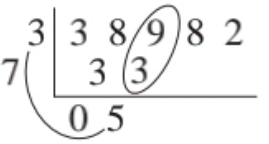
जाँच : $39 - (3 \times 5) = 39 - 15 = 24$



■ $39 - (3 \times 5) = 39 - 15 = 24;$

$24 \div 7 = 3$ शेषफल 3.

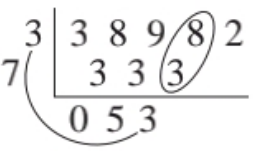
जाँच : $38 - (3 \times 3) = 38 - 9 = 29$



■ $38 - (3 \times 3) = 38 - 9 = 29;$

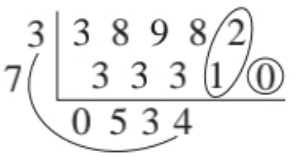
$29 \div 7 = 4$ शेषफल 1.

जाँच : $12 - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$

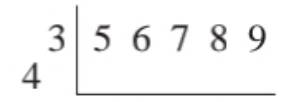


पग 3 : $12 - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$

उत्तर—534 शेषफल 0.

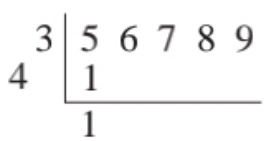


उदाहरण : भाग 56789 में 43 से.



पग 1 : $5 \div 4 = 1$ शेषफल 1

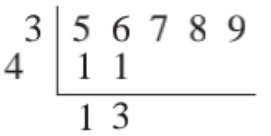
जाँच : $16 - (3 \times 1) = 16 - 3 = 13$



पग 2 : ■ $16 - (3 \times 1) = 16 - 3 = 13$;

$13 \div 4 = 3$ शेषफल 1.

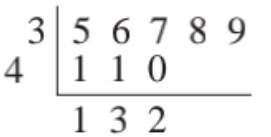
जाँच : $17 - (3 \times 3) = 17 - 9 = 8$



■ $17 - (3 \times 3) = 17 - 9 = 8$;

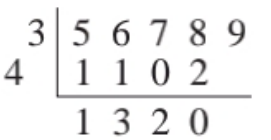
$8 \div 4 = 2$ शेषफल 0.

जाँच : $8 - (3 \times 2) = 8 - 6 = 2$

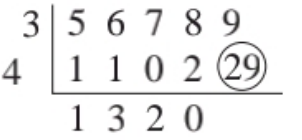


■ $8 - (3 \times 2) = 8 - 6 = 2$;

$2 \div 4 = 0$ शेषफल 2.

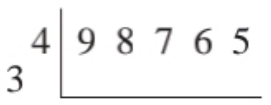


पग 3 : $29 - (3 \times 0) = 29$



भागफल 1320 और शेषफल 29.

उदाहरण : भाग 98765 में 34 से.



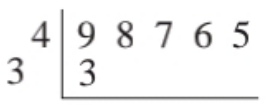
पग 1 : $9 \div 3 = 3$ शेषफल 0.

जाँच : $08 - (4 \times 3) = 08 - 12 = -4$

ऋणात्मक संख्या : इस प्रकार भागफल चयन करें, जो उसे धनात्मक बनाये, अर्थात्

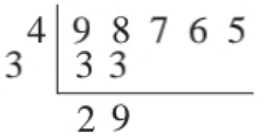
$9 \div 3 = 2$ शेषफल 3.

जाँच : $38 - (4 \times 2) = 38 - 08 = 30$



पग 2 : ■ $38 - (4 \times 2) = 38 - 08 = 30$;

जाँच : $07 - (4 \times 2) = 07 - 08 = -1$



पुनः ऋणात्मक संख्या : भागफल इस प्रकार चयन करें, जो उसे धनात्मक बनाये अर्थात्

$30 \div 3 = 10$ शेषफल 0

अब, $30 \div 3 = 9$ शेषफल 3

जाँच : $37 - (4 \times 9) = 37 - 36 = 1$

■ $37 - (4 \times 9) = 37 - 36 = 1$;

$1 \div 3 = 0$ शेषफल 1.

	4	9	8	7	6	5
3		3	3	1		
		2	9	0		

जाँच : $16 - (4 \times 0) = 16 - 0 = 16$

■ $16 - (4 \times 0) = 16 - 0 = 16$;

$16 \div 3 = 5$ शेषफल 1.

	4	9	8	7	6	5
3		3	3	1	4	
		2	9	0	4	

जाँच : $15 - (4 \times 5) = 15 - 20 = -5$

ऋणात्मक संख्या : भागफल ऐसा चयन करें, जो उसे धनात्मक बनाये, अर्थात्

$16 \div 3 = 4$ शेषफल 4.

जाँच : $45 - (4 \times 4) = 45 - 16 = 29$

पग 3 : $45 - (4 \times 4) = 45 - 16 = 29$

	4	9	8	7	6	5
3		3	3	1	4	(29)
		2	9	0	4	

भागफल 2904 और शेषफल 29.

अभ्यास

1. भाग 7343 में 33 से.
2. भाग 9534 में 56 से.
3. भाग 2188 में 64 से.
4. भाग 4564 में 61 से.

5. भाग 8696 में 36 से.
6. भाग 3276 में 75 से.
7. भाग 1874 में 92 से.
8. भाग 5353 में 24 से.
9. भाग 4585 में 35 से.
10. भाग 7332 में 64 से.

उत्तर

1. 222 शेष 17	2. 170 शेष 14	3. 34 शेष 12	4. 74 शेष 50
5. 241 शेष 20	6. 43 शेष 51	7. 20 शेष 34	8. 223 शेष 1
9. 131 शेष 0	10. 114 शेष 36		

व्यष्टि-समष्टि

हिन्दी अनुवाद : व्यक्तिगत अथवा एकाकी और समस्त.

गणितीय उपयोग : (i) औसत : $\frac{\text{व्यष्टियों का योग}}{\text{कुल व्यष्टियाँ}}$

(ii) महत्तम् समापवर्तक : समापवर्तकों का गुणनफल

लघुतम समापवर्त्य :

(समापवर्तकों का गुणनफल) × (विशेष अपवर्तकों का गुणनफल)

उदाहरण : 12, 13, 14, 15 का औसत ?

$$\text{औसत} = \frac{12 + 13 + 14 + 15}{4} = \frac{54}{4} = 13{\cdot}5.$$

उदाहरण : 210 व 750 का महत्तम् समापवर्तक व लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करें.

2	210, 750
3	105, 375
5	35, 125
	7, 25 — विशेष अपवर्तक

समापवर्तक

लघुत्तम समापवर्त्य $= (2 \times 3 \times 5) \times (7 \times 25)$

$= 30 \times 175 = 5250.$

महत्तम् समापवर्तक $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

अभ्यास

1. 2, 3, 4, 5 का औसत प्राप्त करें. उत्तर—3·5
2. 6, 9, 8, 13, 14 का औसत प्राप्त करें. उत्तर—10
3. 8, 12 का ल. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—24
4. 68, 92 का ल. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—1564
5. 39, 63 का ल. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—819
6. 180, 125 का ल. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—4500
7. 168, 432 का म. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—24
8. 420, 36 का म. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—12
9. 24, 36 का म. स. प. प्राप्त करें. उत्तर—12

गुणक समुच्चयः समुच्चयः गुणक

हिन्दी अनुवाद : समुच्चय के पदों का योग, पदों के गुणा के बराबर है.

गणितीय अर्थ :

गुणा में शून्यों की संख्या : संख्याओं के गुणनफल में कुल अन्तिम शून्य, प्रत्येक संख्या के अन्तिम शून्यों के योगफल बराबर होते हैं.

दशमलव का स्थान : संख्याओं के गुणनफल में दशमलव का स्थान प्रत्येक संख्या के दशमलव के स्थान के योग के बराबर होता है.

घातों का गुणनफल : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

गुणा में शून्यों की संख्या

उदाहरण : 32000 का 100 से गुणा.

यहाँ 32000 के पास 3 शून्य व 100 के पास 2 शून्य हैं.

$\therefore$ (32000×100) के गुणनफल में $3 + 2 = 5$ शून्य होंगे.

उदाहरण : गुणा 400, 4000 व 4 का.

यहाँ 400 में 2 शून्य, 4000 में 3 शून्य व 4 में कोई शून्य नहीं है.

$\therefore$ गुणनफल में $2 + 3 + 0 = 5$ शून्य होंगे.

अभ्यास

गुणनफल में शून्यों की संख्या ज्ञात करें :

1. $56000 \times 4600 \times 32$ उत्तर—5
2. $46000 \times 46 \times 46$ उत्तर—3

3. $32001 \times 100 \times 2$ उत्तर—2
4. $46002 \times 10001 \times 20$ उत्तर—1
5. $1 \times 10 \times 100 \times 1000$ उत्तर—6
6. $1 \times 11 \times 111 \times 1111$ उत्तर—0
7. $1001 \times 10001 \times 100001$ उत्तर—0
8. $1010 \times 1010 \times 1010$ उत्तर—3
9. $1 \times 102 \times 1003$ उत्तर—0
10. $1 \times 20 \times 30 \times 40 \times 50$ उत्तर—4

दशमलव का स्थान

उदाहरण : $2{\cdot}112 \times 3{\cdot}1234$ में दशमलव का स्थान ज्ञात करें ?

$2{\cdot}112$ में 3 स्थान बाद दशमलव है.

$3{\cdot}1234$ में 4 स्थान बाद दशमलव है.

$\therefore$ $2{\cdot}112$ और $3{\cdot}1234$ के गुणनफल में $3 + 4 = 7$ स्थान बाद दशमलव होगा.

उदाहरण : $41{\cdot}112$, $31{\cdot}1112$ और $21{\cdot}12345$ में दशमलव का स्थान ?

$41{\cdot}112$ में 3 स्थान बाद दशमलव है.

$31{\cdot}1112$ में 4 स्थान बाद दशमलव है.

$21{\cdot}12345$ में 5 स्थान बाद दशमलव है.

$\therefore$ गुणनफल में $3 + 4 + 5 = 12$ स्थान बाद दशमलव होगा.

अभ्यास

निम्न के गुणनफल में दशमलव का स्थान ज्ञात करें.

1. $22{\cdot}001, 32{\cdot}0001, 4{\cdot}123$ उत्तर—10
2. $4{\cdot}231, 56{\cdot}1123, 2{\cdot}12467$ उत्तर—12
3. $4{\cdot}245, 4, 5, 6$ उत्तर—3
4. $6{\cdot}2, 6{\cdot}2, 7{\cdot}2$ उत्तर—3

5. 6·2, 6·23, 6·234, 6·2345 उत्तर—10
6. 1, 2, 3, 4, 5 उत्तर—0
7. 10, 20, 30, 40·2 उत्तर—1
8. 50, 50·1, 50·2, 500·3 उत्तर—3
9. 56, 56·01, 56·001, 56·0001 उत्तर—9
10. 1, 2, 3, 5·1, 5·2 उत्तर—2

घातों का गुणा

उदाहरण : $a^2 \times a^5 \times a^7 = a^{2+5+7} = a^{14}$.

उदाहरण : $a^m\, a^n\, b^m\, c^n = a^{m+n}\, b^m\, c^n$.

उदाहरण : $2^5 \times 2 = 2^{5+1} = 2^6$.

अभ्यास

1. $a^5 \times a^4 =$ ..... उत्तर—a^9
2. $a^6 \times a^7 =$ ..... उत्तर—a^{13}
3. $a^6 \times$ .....$= a^7$ उत्तर—a.

वैदिक सूत्र
जो बनाते हैं आसान बीजगणित को

वैदिक गणित के सूत्रों का उपयोग बीजगणित के प्रश्नों के हल में भी किया जा सकता है. यहाँ वैदिक सूत्र गणन को और आसान बनाते हैं.

परावर्त्य योजयेत्

हिन्दी अनुवाद : पक्षान्तरण व समायोजन.

गणितीय अर्थ : किसी भी समीकरण में, किसी पद का एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षान्तरण कर, पद का चिह्न बदल कर समायोजन करें.

उदाहरण : हल करें समीकरण $x + 2 = 0$,

2 का पक्षान्तरण व चिह्न बदल कर समायोजन करने पर $x = -2$.

उदाहरण : हल करें समीकरण $x + y = 7$,

y का पक्षान्तरण व चिह्न बदल कर समायोजन करने पर $x = 7 - y$.

अभ्यास

x का मान, पक्षान्तरण व समायोजन से ज्ञात करें.

1. $x + 5 = 9$ — उत्तर—$x = 4$
2. $x - 3 = 2$ — उत्तर—$x = 5$
3. $x + y = 4$ — उत्तर—$x = 4 - y$
4. $x + 7 = 9$ — उत्तर—$x = 2$
5. $x + z = 3$ — उत्तर—$x = 3 - z$
6. $x - y = 4$ — उत्तर—$x = 4 + y$.

सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्

हिन्दी अनुवाद : अन्तिम और उससे पहले का दूना.

गणितीय अर्थ : यदि A, B, C, D समान्तर श्रेणी में हैं और हमारे पास समीकरण है, $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}$ तब $D+2C=0$ एक हल होगा.

उदाहरण : हल करें : $\frac{1}{(2x+1)(3x+2)}+\frac{1}{(2x+1)(4x+3)}$

$$=\frac{1}{(2x+1)(5x+4)}+\frac{1}{(3x+2)(4x+3)}$$

यहाँ $A=2x+1$, $B=3x+2$, $C=4x+3$ और $D=5x+4$ तथा यह समान्तर श्रेणी में है.

$$\therefore \quad (5x+4)+2(4x+3)=0$$

$$\Rightarrow \quad (5x+4)+(8x+6)=0$$

$$\Rightarrow \quad 13x+10=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{10}{13}.$$

अभ्यास

हल करें :

1. $\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+8x+15}=\frac{1}{x^2+9x+18}+\frac{1}{x^2+9x+20}$

उत्तर—$x=\frac{-16}{3}$

2. $\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+6x+8}=\frac{1}{x^2+7x+10}+\frac{1}{x^2+7x+12}$

उत्तर—$x=\frac{-13}{3}$.

पूरणापूरणाभ्यां

हिन्दी अनुवाद : पूर्णता व अपूर्णता से.

गणितीय अर्थ : कुछ समीकरण (अपूर्ण) पूर्ण (वर्ग, घन आदि) बना करके भी हल किए जा सकते हैं.

उदाहरण : यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ?

$\left(x + \frac{1}{x}\right)$ को पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\Rightarrow \quad (2)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 - 2 = 2.$$

उदाहरण : यदि $x + y = 10$ और तब $xy = 16$, $(x - y)$ का मान ?

$(x - y)$ को पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$\Rightarrow \quad (x - y)^2 = (10)^2 - 4\,(16)$$

$$= 100 - 64 = 36$$

$$\Rightarrow \quad (x - y) = \pm 6.$$

अभ्यास

1. यदि $x + y = 7, xy = 12$, तो $x^2 - y^2$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—7
2. यदि $a - b = 3, ab = 10$, तो $a + b$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—7
3. यदि $a - b = \frac{3}{2}, ab = \frac{27}{16}$, तो $a + b$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—3
4. यदि $a + b = 9, ab = 18$, तो $a - b$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—3
5. यदि $a^2 + \frac{1}{a^2} = 38$, तो $a - \frac{1}{a}$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—6
6. यदि $a^2 + \frac{1}{a^2} = 98$, तो $a^3 + \frac{1}{a^3}$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—970
7. यदि $a^2 - 6a - 1 = 0$, तो $a^2 + \frac{1}{a^2}$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—38
8. यदि $a + b = 8, ab = 3\frac{3}{4}$, तो $a - b$ का मान ज्ञात करें. उत्तर—7
9. यदि $3x + 4y = 16, xy = 4$, तो $9x^2 + 16y^2$ का मान ज्ञात करें.
   उत्तर—160
10. यदि $6x - 7y = 4, xy = 6$, तो $36x^2 + 49y^2$ का मान ज्ञात करें.
    उत्तर— 520

आनुरूप्ये शून्यंअन्यत्

हिन्दी अनुवाद : यदि एक अनुपात में है तो दूसरा शून्य होगा.

गणितीय अर्थ : यदि युगपत् समीकरणों में एक अज्ञात गुणक का अनुपात, स्वतंत्र पदों के अनुपात के बराबर हो तो अन्य अज्ञात गुणक शून्य होंगे.

उदाहरण : हल करें : $x + 3y + 2z = 3$

$$2x + 6y + z = 6$$

$$x + 12y + 5z = 12$$

यहाँ एक अज्ञात गुणक y का अनुपात $3 : 6 : 12$ स्वतन्त्र पदों के बराबर है.

$\therefore$ $y = 1$ और $x = z = 0$.

उत्तर—$y = 1, x = z = 0$.

उदाहरण : हल करें : $x + 6y = 12$

$$x + 5y = 10$$

यहाँ स्वतंत्र पद y का अनुपात $6 : 5 : : 12 : 10$.

$\Rightarrow$ $\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$

$\Rightarrow$ $\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

$\therefore$ अनुपात समान है.

$\Rightarrow$ $y = 2, x = 0$

उत्तर—$x = 0, y = 2$.

अभ्यास

1. हल करें : $ax + by = am$, $cx + dy = cm$ — उत्तर—$x = m, y = 0$

2. हल करें : $12x + 78y = 12$, $16x + 96y = 16$ — उत्तर—$x = 1, y = 0$

3. हल करें : $172x + 499y = 212$, $387x + 9779y = 477$ — उत्तर—$x = \frac{53}{43}$ $y = 0.$

4. हल करें : $ax + by + cz = a$, $bx + cy + az = b$, $cx + ay + bz = c$ — उत्तर—$x = 1, y = z = 0$

5. हल करें : $ax + by + cz = cm$, $ax + ay + fz = fm$, $mx + py + qz = qm$ — उत्तर—$x = y = 0, z = m$

6. हल करें : $97x + \alpha y + 43z = \alpha m$, $36x + \beta y + 47z = \beta m$, $47x + \gamma y + 48z = \gamma m$ — उत्तर—$x = z = 0, y = m$

7. हल करें : $6x + 7y = 8$, $19x + 14y = 16$ — उत्तर—$x = 0, y = 8/7$

संकलन व्यवकलनाभ्याम्

हिन्दी अनुवाद : जोड़ना व घटाना.

गणितीय अर्थ : यदि युगपत् समीकरणों में गुणक x व y आपस में विनिमेय है तो समीकरण का हल जोड़ व घटाकर किया जा सकता है.

उदाहरण : हल : $x + 3y = 10$

$3x + y = 5$

यहाँ x व y आपस में विनिमेय है.

जोड़ें $x + 3y = 10$

$3x + y = 5$

$4x + 4y = 15 \Rightarrow x + y = 15/4$ ...(i)

घटाएं $x + 3y = 10$

$-3x - y = -5$

$-2x + 2y = 5 \Rightarrow y - x = 5/2$ ...(ii)

(i) व (ii) जोड़ने पर

$$2y = \frac{15}{4} + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{15 + 10}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{25}{8}$$

(i) व (ii) को घटाने पर

$$2x = \frac{15}{4} - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{15-10}{4} = \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{8}$

उत्तर—$x = \frac{5}{8}$ और $y = \frac{25}{8}$.

उदाहरण : हल करें : $45x - 23y = 113$

$23x - 45y = 91$

$\therefore$ जोड़ें $68x - 68y = 68(x-y) = 204$

$\Rightarrow \quad x - y = 3 \quad \ldots(i)$

घटाएं $22x + 22y = 22(x+y) = 22$

$\Rightarrow \quad x + y = 1 \quad \ldots(ii)$

(i) व (ii) को जोड़ने पर, $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

(i) से (ii) को घटाने पर $-2y = +2 \Rightarrow y = -1$

उत्तर—$x = 2$ और $y = -1$.

अभ्यास

1. $23x - 29y = 98$ और $29x - 23y = 110$ को हल करें.

   उत्तर—$x = 3, y = -1$

2. $3x + 4y = 24$ और $4x - 3y = 7$ को हल करें. उत्तर—$x = 4, y = 3$

3. $2x + 5y = -7$ और $5x + 2y = 14$ को हल करें.

   उत्तर—$x = 4, y = -3$

4. $17x - 23y = 52$ और $23x - 17y = 28$ को हल करें.

   उत्तर—$x = -1, y = -3$

5. $11x + 17y = 67$ और $17x + 11y = 73$ को हल करें.

   उत्तर—$x = 3, y = 2$

6. $65x - 33y = 97$ और $33x - 65y = 1$ को हल करें.

   उत्तर—$x = 2, y = 1$

आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन

हिन्दी अनुवाद : पहले से पहला, अन्तिम से अन्तिम.

गणितीय अनुप्रयोग : द्विघातीय समीकरणों $ax^2 + bx + c$ के गुणनखण्ड में.

- मध्य पद $b = \alpha + \beta$ को इस प्रकार तोड़ो कि $\overline{ax^2 + (\alpha} + \overline{\beta)\, x + c}$ $\frac{a}{\alpha} = \frac{\beta}{c}$ का अनुपात प्राप्त हो. तब $\frac{a}{\alpha} = \frac{\beta}{c} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ (माना) हमें $(\theta_1 x + \theta_2)$ के रूप में एक गुणनखण्ड प्राप्त होता है.
- दूसरा गुणनखण्ड होगा $\left(\frac{ax}{\theta_1} + \frac{c}{\theta_2}\right)$.

उदाहरण : $2x^2 + 7x + 5$ के गुणनखण्ड करें ?

- $7 = 2 + 5$ में तोड़ने पर

  $\overline{2x^2 + (2} + \overline{5)\, x + 5} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{1}{1}$

  $\therefore (x + 1)$ एक गुणनखण्ड है.
- $\frac{2x}{1} + \frac{5}{1} = (2x + 5)$ दूसरा गुणनखण्ड है.

उत्तर—$2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)\,(2x + 5)$.

उदाहरण : $7x^2 - 19x - 6$ के गुणनखण्ड ?

- तोड़ें $-19 = -21 + 2$ को इस प्रकार कि $\overline{7x^2 + (-21} + \overline{2)\, x - 6}$ से $\frac{7}{-21} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$ इसलिए $(x - 3)$ एक गुणनखण्ड है.
- $\frac{7x}{1} - \frac{6}{-3} = 7x + 2$ दूसरा गुणनखण्ड है.

गुणनखण्ड हैं $(x - 3)\,(7x + 2)$

अभ्यास

1. $x^2 + 11x + 24$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(x + 3)\ (x + 8)$
2. $5 - 4\ (a - b) - 12\ (a - b)^2$ के गुणनखण्ड करें.

   उत्तर—$[1 - 2\ (a - b)]\ [5 + 6\ (a - b)]$
3. $x^2 - 8x - 20$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(x - 10)\ (x + 2)$
4. $x^2 - x - 6$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(x - 3)\ (x + 2)$
5. $6 - x - x^2$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(2 - x)\ (x + 3)$
6. $12 + x - x^2$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(4 - x)\ (x + 3)$
7. $12x^2 + 7x - 10$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(3x - 2)\ (4x + 5)$
8. $2x^2 - x - 15$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(x - 3)\ (2x + 5)$
9. $3 - 4x - 7x^2$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$(x + 1)\ (3 - 7x)$
10. $10 - 58x - 12x^2$ के गुणनखण्ड करें. उत्तर—$2\ (x + 5)\ (1 - 6x)$

अन्त्ययोरेव

हिन्दी अनुवाद : अन्तिम पद (स्वतन्त्र पद) से.

गणितीय अर्थ : समीकरण जिनमें एक पक्ष में स्वतन्त्र पदों को छोड़कर अंश और हर का जो अनुपात है वही अनुपात दूसरे पक्ष के अंश व हर में होता है. तब यह अनुपात स्वतन्त्र पदों के अनुपात के बराबर होता है.

उदाहरण : हल करें : $\frac{2-2x-3x^2}{2-5x-6x^2}=\frac{3x+2}{6x+5}$

यहाँ $\frac{-2x-3x^2}{-5x-6x^2}=\frac{-x(3x+2)}{-x(6x+5)}=\frac{3x+2}{6x+5}$

$\therefore \quad \frac{3x+2}{6x+5}=\frac{2}{2}$

$\Rightarrow \quad (3x+2)=(6x+5)$

$\Rightarrow \quad x=-1$

यहाँ x का मान है, -1.

उदाहरण : हल करें : $\frac{1-qx}{1-px}=\frac{2+pqx-q^2px^2}{2+pqx-p^2qx^2}$

$\frac{pqx-q^2px^2}{pqx-p^2qx^2}=\frac{(1-qx)\,pqx}{(1-px)\,pqx}=\frac{1-qx}{1-px}$

$\therefore \quad \frac{1-qx}{1-px}=\frac{2}{2}$

$\Rightarrow \quad 1-px=1-qx$

यदि $p \neq q$ तब, $x=0$

उत्तर—$p \neq q, x=0$

अभ्यास

हल करें :

1. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x + 1}{x + 3}$ उत्तर—$x = 0$

2. $\frac{(x + 1)(x + 6)}{(x + 3)(x + 5)} = \frac{x + 7}{x + 8}$ उत्तर—$x = -\frac{19}{3}$

3. $\frac{(2x + 3)^2}{(2x + 5)^2} = \frac{x + 3}{x + 5}$ उत्तर—$x = -\frac{15}{8}$

4. $\frac{58x^2 + 87x + 7}{87x^2 + 145x + 11} = \frac{2x + 3}{3x + 5}$ उत्तर—$x = 2$

5. $\frac{3x^2 + 5x + 8}{5x^2 + 6x + 12} = \frac{3x + 5}{5x + 6}$ उत्तर—$x = 3$.

लोपंस्थापनाभ्याम्

हिन्दी अनुवाद : पदों को हटाकर व छोड़कर.

गणितीय अर्थ : समीकरणों का हल किसी अज्ञात पद को हटाकर व छोड़कर के भी किया जा सकता है.

उदाहरण : गुणनखण्ड करें.

$$E = 3x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy - yz - zx$$

z को हटाने पर $z = 0$,

$$E = 3x^2 + y^2 - 4xy = (x - y)(3x - y) \quad \ldots(i)$$

y को हटाने पर $y = 0$,

$$E = 3x^2 - 2z^2 - zx = (x - z)(3x + 2z) \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$E = (x - y - z)(3x - y + 2z)$$

उदाहरण : $6x^2 - 8y^2 - 6z^2 + 2xy + 16yz + 5xz$ के गुणनखण्ड करें.

z को हटाने पर $z = 0$

$$6x^2 - 8y^2 + 2xy = (2x - 2y)(3x + 4y) \quad \ldots(i)$$

y को हटाने पर $y = 0$,

$$6x^2 - 6z^2 + 5xz = (3x - 2z)(2x + 3z) \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से अभीष्ट गुणनखण्ड होंगे

$$(2x - 2y + 3z)(3x + 4y - 2z)$$

अभ्यास

1. $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 7xy + 11yz + 7zx$ के गुणनखण्ड करें.

   उत्तर—$(x + 2y + 3z)(2x + 3y + z)$

2. $3x^2 + xy - 2y^2 + 19xz + 28z^2 + 9xw - 30w^2 - yz + 19wy + 46zw$ के गुणनखण्ड करें.

   उत्तर—$(x + y + 4z - 2w)(3x - 2y + 7z + 15w)$

गुणित समुच्चयः समुच्चय गुणितः

हिन्दी अनुवाद : गुणांकों का योग, गुणांकों के योग के गुणा के बराबर.

गणितीय अर्थ : यदि द्विघातीय, त्रिघातीय आदि समीकरणों के गुणनखण्ड करें तो समीकरण के गुणांकों का योग, उसके गुणनखण्ड में प्रयुक्त पदों के गुणांकों के योग के गुणा के बराबर होगा.

उदाहरण : समीकरण $15x^2 - 14xy - 8y^2 = (3x - 4y)(5x + 2y)$.

बाएँ पक्ष के गुणांकों का योग $= 15 - 14 - 8 = -7$.

दाएँ पक्ष के गुणांकों के योग के गुणा के बराबर है.

$= (3 - 4)(5 + 2) = (-1)(7) = -7$.

उदाहरण : व्यंजक

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

बाएँ पक्ष से,

$1 + 6 + 11 + 6 = 24$.

दाएँ पक्ष से,

$(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) = (2)(3)(4) = 24$.

उदाहरण : व्यंजक

$3x^2 + x - 14 = (x - 2)(3x + 7)$ में.

बाएँ पक्ष $= 3 + 1 - 14 = -10$.

दाएँ पक्ष $= (1 - 2)(3 + 7) = -1 \times 10 = -10$.

अभ्यास

गुणित समुच्चयः समुच्चय गुणितः देखें.

1. $12x^2 - 23xy + 10y^2 = (3x - 2y)(4x - 5y)$ उत्तर—हाँ
2. $12x^2 + 13x - 4 = (3x + 4)(4x - 1)$ उत्तर—हाँ

3. $7x^2 - 6x - 1 = (x - 1)(7x + 1)$ उत्तर—हाँ
4. $6x^2 + 37x + 6 = (x + 6)(6x + 1)$ उत्तर—हाँ
5. $6x^2 + 11x - 10 = (2x + 5)(3x - 2)$ उत्तर—हाँ
6. $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$ उत्तर—हाँ
7. $3x^2 + x - 14 = (x - 2)(3x + 7)$ उत्तर—हाँ
8. $2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(2x + 5)$ उत्तर—हाँ
9. $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$ उत्तर—हाँ
10. $8x^2 - 22x + 5 = (2x - 5)(4x - 1)$ उत्तर—हाँ

शून्यं साम्य समुच्चये

हिन्दी अनुवाद : जब भी कोई व्यंजक समान है तो वह व्यंजक शून्य है.

गणितीय अर्थ : यहाँ पर व्यंजक भिन्न-भिन्न अर्थ में प्रयोग किया गया है.

1. *यदि किसी समीकरण में कोई पद, सभी पदों में उभयनिष्ठ है, तो वह पद शून्य है.*

उदाहरण : $12x + 3x = 4x + 5x$ को हल करें.

यहाँ x समान पद है.

$\therefore \qquad x = 0.$

उदाहरण : $19\,(x + 7) + 17\,(x + 7) + (x + 7) = 0$ को हल करें.

यहाँ $(x + 7)$ सभी पदों में उभयनिष्ठ है.

$\therefore \qquad (x + 7) = 0.$

2. *किसी समीकरण में स्वतन्त्र पदों का गुणा एकसमान होता है, तो x का मान शून्य होगा.*

उदाहरण : $(x + 3)\,(x + 21) = (x + 7)\,(x + 9)$ को हल करें.

$\because \qquad 3 \times 21 = 7 \times 9$

$\therefore \qquad x = 0$

उदाहरण : $(x + 2)\,(x + 3) = (x + 6)\,(x + 1)$ को हल करें.

$\because \qquad 2 \times 3 = 6 \times 1$

$\therefore \qquad x = 0$

3. *यदि दो भिन्नों में अंश समान हों, तो दोनों हरों का योग शून्य होगा.*

उदाहरण : $\dfrac{5}{2x+1} + \dfrac{5}{3x-1} = 0$ को हल करें.

यहाँ अंश 5, दोनों भिन्नों के लिए एक है, तब हरों का योग शून्य होगा.

$\therefore \quad (2x + 1) + (3x - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0$

उदाहरण : $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x^2+9} = 0$ को हल करें.

यहाँ अंश 1, दोनों भिन्नों के लिए एक है.

$\therefore \quad (x + 5) + (x^2 + 9) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + x + 14 = 0$

4. *किसी समीकरण में अंशों का योग हरों के योग के बराबर है, तो योग शून्य होगा.*

उदाहरण : $\frac{2x+9}{2x+7} = \frac{2x+7}{2x+9}$ को हल करें.

अंशों का योग $= (2x + 9) + (2x + 7)$

$=$ हरों का योग

$\therefore \quad (2x + 9) + (2x + 7) = 0.$

5. *यदि व्यंजक समान है तो एक को दूसरे से घटाने पर शून्य प्राप्त होगा.*

उदाहरण : व्यंजक $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2 + 2ab$ समान है.

$\therefore \quad (a + b)^2 - (a^2 + b^2 + 2ab) = 0.$

उदाहरण : x का मान प्राप्त करें यदि $(x + 3)$ और $(y + 7)$ समान हैं.

यदि व्यंजक समान है तो एक को दूसरे से घटाने पर शून्य प्राप्त होगा.

$\therefore \quad (x + 3) - (y + 7) = 0$

$\Rightarrow \quad x - y - 4 = 0$

या $\quad x = y + 4.$

अभ्यास

हल करें :

1. $x(x + 4) = x^2 + 8x - 4$ उत्तर—$x = 1$
2. $(4x - 3)(2x + 1) = 4(x - 3)(2x - 5)$ उत्तर—$x = \frac{3}{2}$
3. $(x - 2) + 5 = (x + 1)(x - 1) + x$ उत्तर—$x = \pm 2$

4. $5(x+1)^2 + 7(x+3)^2 = 12(x+2)^2$ उत्तर—$x = -5$

5. $\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{5} = 3$ उत्तर—$x = \frac{17}{4}$

6. $\frac{2x-1}{3} - \frac{6x-2}{5} = \frac{1}{3}$ उत्तर—$x = \frac{(-1)}{2}$

7. $\frac{x}{3} = 1 + \frac{2x-1}{4}$ उत्तर—$x = \frac{(-9)}{2}$

8. $\frac{3x}{5} = 1 + \frac{2x-1}{4}$ उत्तर—$x = \frac{15}{2}$

9. $\frac{2x-3}{5} - \frac{x-7}{3x} = \frac{2x}{5}$ उत्तर—$x = \frac{5}{2}$

10. $\frac{x+7}{3} = 1 + \frac{3x-2}{5}$ उत्तर—$x = \frac{13}{2}$

●●●

उ प का र

वैदिक गणित सूत्र

एकाधिकेन पूर्वेण

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

एकन्यूनेन पूर्वेण

शून्यं साम्यसमुच्चये

YOUR SUCCESS
IS
OUR AIM
SURE SUCCESS
WITH
OUR NAME
THAT IS
UPKAR

उपकार प्रकाशन, आगरा-2

Code No. 540